Exercice 16 :

$U_n = 2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$; $V_n = 2^{n+1} \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$

1°/ Etudier le sens de variations de chacune des suites (U_n) et (V_n)

2°/ Montrer que $V_n > U_n$

3°/ Montrer que (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes et calculer leur limite

Exercice 17 :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n V_n}{U_n + V_n} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} \end{cases}$$

1°/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$0 < U_n < V_n$$

2°/

a) Montrer que : $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$

b) Montrer que : $V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3°/ Montrer que (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes .

4°/

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : U_n V_n = 2$

b) Calculer alors la limite ℓ de (U_n) et (V_n)

Exercice 18 :

I- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \dfrac{x}{1+x+x^2}$

1) Montrer que $\forall x \geq 0$ on a : $f(x) \leq x$

2) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$

II-

1) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$